Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Matemáticas I (MA1111)
3^{er} Examen Parcial (35 %)
Sep-Dic 2017

Turno 1-2
Duración: 1 hora 50 minutos

RESPUESTAS

Pregunta 1. (5 ptos.) Calcule $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{1-\operatorname{sen}\left(x/2\right)}{x^2-2\pi x+\pi^2}$

Solución: Como $\lim\limits_{x\to\pi}\left(1-\operatorname{sen}\left(x/2\right)\right)=0=\lim\limits_{x\to\pi}\left(x^2-2\pi x+\pi^2\right)$ y $\lim\limits_{x\to\pi}\left(-\dfrac{1}{2}\cos\left(x/2\right)\right)=0=\lim\limits_{x\to\pi}\left(2x-2\pi\right)$, la Regla de L'Hôpital establece

$$\lim_{x\to\pi}\frac{1-\operatorname{sen}\left(x/2\right)}{x^2-2\pi x+\pi^2} \overset{\substack{\text{L'H}\\ \downarrow}}{=} \lim_{x\to\pi}\frac{-\frac{1}{2}\cos\left(x/2\right)}{2x-2\pi} \overset{\substack{\text{L'H}\\ \downarrow}}{=} \lim_{x\to\pi}\frac{\frac{1}{4}\operatorname{sen}\left(x/2\right)}{2}=1/8$$

ya que el último límite existe.

Pregunta 2. (5 ptos.) Halle la derivada de

$$f(x)=\frac{\operatorname{sen}\left(x^2\right)\operatorname{sen}^2(x)}{1+\operatorname{sen}(x)}$$

Solución:

$$f'(x)=\frac{\left(\cos\left(x^2\right)2x\operatorname{sen}^2(x)+\operatorname{sen}\left(x^2\right)2\operatorname{sen}(x)\cos(x)\right)\left(1+\operatorname{sen}(x)\right)-\operatorname{sen}\left(x^2\right)\operatorname{sen}^2(x)\cos(x)}{\left(1+\operatorname{sen}(x)\right)^2}$$

Pregunta 3. (5 ptos.) Halle la ecuación de la recta tangente a la curva determinada por $2\left(x^2+y^2\right)^2=25\left(x^2-y^2\right)$ en el punto de abscisa 3 perteneciente al primer cuadrante.

Solución: Haciendo $x=3$,

$$\begin{aligned}
2\left(9+y^2\right)^2=25\left(9-y^2\right) &\Rightarrow 2y^4+61y^2-63=0\\
&\Rightarrow \underbrace{\left(2y^2+63\right)}_{>0}\left(y^2-1\right)=0\\
&\Rightarrow y^2-1=0\\
&\Rightarrow y=-1 \text{ o } y=1
\end{aligned}$$

pero como el punto está en el primer cuadrante, tenemos que $y = 1$. Luego, derivando implícitamente la ecuación de la curva,

$$4\big(x^2 + y^2\big)\big(2x + 2yy'\big) = 25\big(2x - 2yy'\big)$$

y reemplazando $(x, y) = (3, 1)$ en ésta, se obtiene la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto; ella es $y' = -9/13$. Así, la ecuación de la recta deseada es $9x + 13y - 40 = 0$.

Pregunta 4. (10 ptos.) Dada la función $f(x) = \dfrac{(x-1)^3}{x^2 + x - 2}$, halle:

a. Asíntotas (verticales, horizontales y oblicuas);

b. Puntos críticos;

c. Intervalos de crecimiento y de decrecimiento;

d. Intervalos de concavidad;

e. Puntos de inflexión.

Solución: $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$ ya que $x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -2^-} f(x) &= \lim_{x\to -2^-} \frac{(x-1)^3}{(x+2)(x-1)} = -\infty \\
\lim_{x\to -2^+} f(x) &= \lim_{x\to -2^+} \frac{(x-1)^3}{(x+2)(x-1)} = \infty \\
\lim_{x\to 1} f(x) &= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^3}{(x+2)(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{x+2} = 0 \\
\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to -\infty} \frac{1 - 3/x + 3/x^2 - 1/x^3}{1 + 1/x - 2/x^2} = 1 \\
\lim_{x\to -\infty} \big(f(x) - 1x\big) &= \lim_{x\to -\infty} \left(\frac{-4 + 1/x}{1 + 2/x}\right) = -4 \\
\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to \infty} \frac{1 - 3/x + 3/x^2 - 1/x^3}{1 + 1/x - 2/x^2} = 1 \\
\lim_{x\to \infty} \big(f(x) - 1x\big) &= \lim_{x\to \infty} \left(\frac{-4 + 1/x}{1 + 2/x}\right) = -4
\end{aligned}$$

Posee asíntota vertical en $x = -2$ pero no en $x = 1$.
Posee asíntota oblicua $y = x - 4$ tanto para $x \to -\infty$ como para $x \to \infty$.
No posee asíntota horizontal (ya que posee oblicua hacia ambos lados).

$$f'(x) = \frac{(x-1)(x+5)}{(x+2)^2}$$

El único punto crítico es $x = 5$, que es estacionario.

$$\begin{array}{lcl} f'(x) > 0 & \iff & x \in (-\infty, -5) \cup (1, \infty) \\ f'(x) < 0 & \iff & x \in (-5, -2) \cup (-2, 1) \end{array}$$

f es creciente en $(-\infty, -5)$ y en $(1, \infty)$.
f es decreciente en $(-5, -2)$ y en $(-2, 1)$.

$$f''(x) = \frac{18}{(x+2)^3}$$

$$\begin{array}{lcl} f''(x) > 0 & \iff & x \in (-2, 1) \cup (1, \infty) \\ f''(x) < 0 & \iff & x \in (-\infty, -2) \end{array}$$

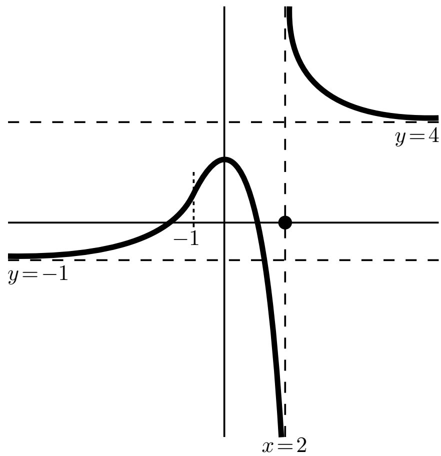
f es cóncava hacia arriba en $(-2, 1)$ y en $(1, \infty)$.
f es cóncava hacia abajo en $(-\infty, -2)$.
No posee puntos de inflexión.

Pregunta 5. (5 ptos.) Haga un bosquejo de la gráfica de f sabiendo que:

- $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y f es continua en $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$
- $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \infty \qquad \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty \qquad f(2) = 0$
- $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 4 \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$
- $f'(x) > 0$ si $x < 0$ y $f'(x) < 0$ si $x \in (0, 2) \cup (2, \infty)$
- $f''(x) > 0$ si $x \in (-\infty, -1) \cup (2, \infty)$ y $f''(x) < 0$ si $x \in (-1, 2)$

Además, determine si $f(x)$ alcanza un extremo local en el intervalo $(-\infty, 2)$.

Solución:



La función f alcanza un máximo local en $x = 0 \in (-\infty, 2)$ ya que es continua en $(-\infty, 2)$, creciente en $(-\infty, 0)$ y decreciente en $(0, 2)$.

Pregunta 6. (5 ptos.) Halle las dimensiones del triángulo rectángulo de área máxima que puede construirse con un segmento de longitud L como hipotenusa.

Solución: Si los catetos del triángulo rectángulos miden x e y entonces, $x, y \in (0, L)$ ya que $L^2 = x^2 + y^2$. El área del triángulo, A, viene dada por

$$A(x) = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}x\sqrt{L^2 - x^2}\,, \quad \text{con } x \in (0, L).$$

Luego,

$$A'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{L^2 - 2x^2}{\sqrt{L^2 - x^2}}\right)$$

y el único punto crítico ocurre en $x = L/\sqrt{2}$, que es estacionario. Como,

$$A''\big(L/\sqrt{2}\big) = \frac{1}{2}\,\frac{\big(-3L^2 + x^2\big)x}{L^2 - x^2}\Bigg|_{x=\frac{L}{\sqrt{2}}} = \frac{-5L}{4\big(\sqrt{2} - 1\big)} < 0$$

entonces $A\big(L/\sqrt{2}\big)$ es el valor máximo de la función A sobre $(0, L)$. En tal caso, $x = L/\sqrt{2}$ e $y = \sqrt{L^2 - \big(L/\sqrt{2}\big)^2} = L/\sqrt{2}$ son las dimensiones deseadas.